

نظريه اساسی گراف

امید

بهار ۹۷

فهرست مطالب

۳	۱ گراف‌ها و کاربردهایشان
۳	۱.۱ مقدمه
۵	۲.۱ کاربردهای گراف
۵	۱.۲.۱ نگاشت رنگ آمیزی
۶	۲.۲.۱ تخصیص بسامد
۷	مراجع
۸	مراجع
۹	۲ اصطلاحات پایه‌ای گراف
۹	۱.۲ گراف‌ها و گراف‌های چندگانه
۹	مراجع
۱۰	مراجع

فصل ۱

گراف‌ها و کاربردهایشان

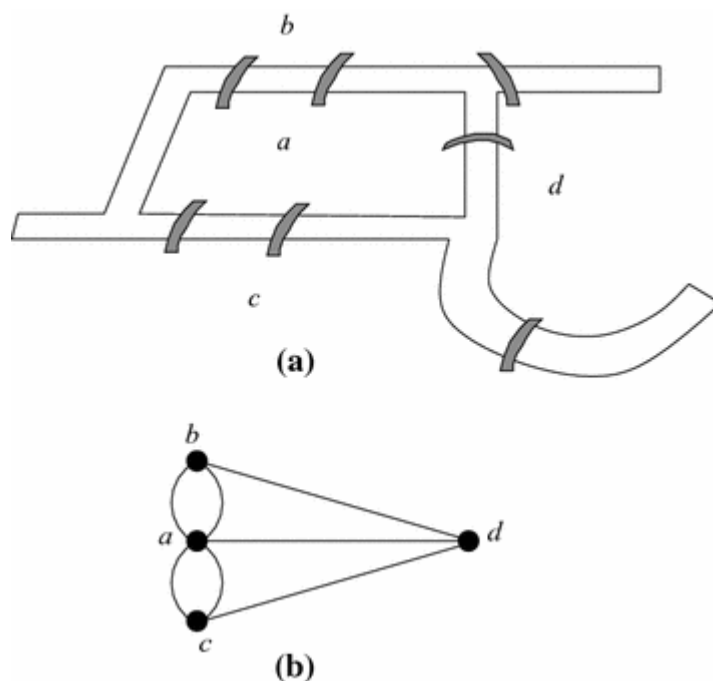
۱.۱ مقدمه

گراف شامل مجموعه‌ای از رأس‌ها و مجموعه‌ای از یال‌ها است که هر دو رأس به می‌پیوندند. معمولاً شیء به وسیله رأس و رابطه بین دو به وسیله یال نشان داده می‌شود. از این رو، گراف می‌تواند برای نشان دادن همه‌ی اطلاعاتی که می‌توان به صورت اشیاء و رابطه بین آنها مدل‌سازی کرد مورد استفاده قرار گیرد. نظریه گراف به مطالعه گراف‌ها می‌پردازد. سنگ بنای نظریه گراف توسط اوایلر در سال ۱۷۳۶ با حل معمایی به نام هفت پل کینگزبرگ گذاشته شد [۱]. کینگزبرگ یک شهر قدیمی در شرق پروس است و بر روی رودخانه پرگل قرار دارد. رودخانه پرگل یک جزیره به نام نایگاف را احاطه کرده و به دو شاخه تقسیم می‌شود که در شکل ۱.۱ (الف) نشان داده شده، که چهار منطقه خشکی: جزیره a ، دو حاشیه رودخانه b ، c و خشکی d بین دو شاخه را ایجاد می‌کند. هفت پل چهار منطقه خشکی شهر را به هم متصل می‌کنند. در آن معما گفته شده که مردم کینگزبرگ برای سرگرمی خودشان تلاش می‌کردند تا طرحی برای پیاده روی در اطراف شهر به کار برند که از هر یک از هفت پل فقط یک بار عبور کنند. از آنجا که تلاش‌های آنها همیشه شکست خورده بود، بسیاری از آنها معتقد بودند که این کار غیرممکن است، اما تا سال ۱۷۳۶ اثبات نشد. در آن سال، یکی از ریاضیدانان برجسته آن زمان، راه حلی برای این مسئله منتشر کرد که چنین پیاده‌روی امکان پذیر نیست. او نه تنها به این مسئله خاص پرداخت، بلکه روشی کلی برای مسائل دیگر از نوع مشابه ارائه داد.

اوایلر مدلی ریاضی برای مسئله ساخت که در آن هر یک از چهار خشکی a, b, c و d با یک نقطه و هر یک از هفت پل با یک منحنی یا پاره‌خطی به صورت شکل ۲.۱ (ب) نشان داده شده است.

اکنون می‌توان مسئله را به صورت زیر بیان کرد: آیا با شروع در یکی از نقاط a, b, c, d ، می‌توان بدون اینکه یک یال یکسان را دو بار پیمود، شکل را ردیابی کرد؟ مدل ریاضی ساخته شده برای مسئله به عنوان مدل گراف مسئله شناخته شده است. نقاط a, b, c و رأس d ، پاره‌خط‌ها نیز یال و کل نمودار گراف نامیده می‌شود.

قبل از ارائه کاربردهای دیگر گراف، نیاز داریم تا برخی اصطلاحات را بدانیم. گراف G چندتایی (V, E) است که شامل مجموعه‌ی متناهی V از رأس‌ها و مجموعه‌ی متناهی E از یال‌ها است. هر یال جفتی نامرتب از رأس‌ها است. دو رأس مشترک با یال e رئوس انتهایی e نامیده می‌شود.



شکل ۱.۱: مدل گراف برای پل‌های کینگزبرگ

اغلب یال بین دو رأس u و v را با (u, v) نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی رأس‌های گراف G را به وسیله $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های G را به وسیله $E(G)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $e = (u, v)$ یالی از گراف G باشد. در این صورت به دو رأس u و v در G مجاور گفته می‌شود و یال e تلاقی رأس‌های u و v گفته می‌شود. همچنین رأس u همسایه v در G و برعکس نامیده می‌شود. گراف شکل ۲.۱ (ب) شش رأس a, b, c, d, e, f و ده یال دارد. رأس‌های a و b ،

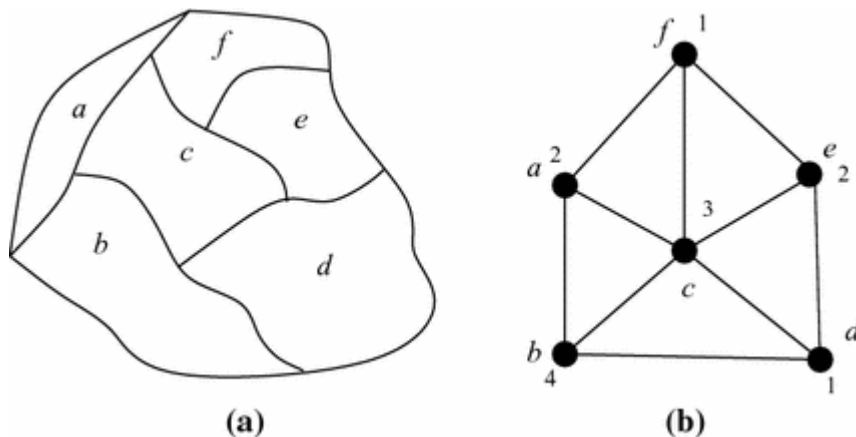
رأس‌های انتهایی یال (a, b) هستند. بنابراین a و b مجاور هستند. رأس‌های b, c و f همسایه‌های رأس a هستند.

۲.۱ کاربردهای گراف

گراف‌ها تقریباً در تمام شاخه‌های علوم پایه و مهندسی کاربرد دارند [۲, ۳]. در این بخش کاربردهایی از گراف در مدل سازی برخی مسائل دنیای واقعی مشاهده خواهیم کرد.

۱.۲.۱ نگاشت رنگ آمیزی

نگاشتی چند قلمروای، که هر قلمرو ناحیه‌ای پیوسته در نگاشت است، می‌خواهیم قلمروها را با رنگ‌های مختلف رنگ کنیم به طوری که هیچ دو قلمرویی با مرزی مشترک رنگ یکسان نداشته باشند. البته هدف استفاده از حداقل تعداد رنگ است. چنین مسئله‌ای به راحتی می‌تواند با استفاده از گراف به صورت زیر مدل سازی شود. هر قلمرو را با یک رأس و اگر دو قلمرو متناظر با رأس‌ها مرزی مشترک داشته باشند با اضافه کردن یالی بین دو رأس نشان می‌دهیم



شکل ۲.۱: (الف) نگاشت و (ب) مدل گراف برای نگاشت رنگ آمیزی

همانطور که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است، که شکل ۲.۱ (ب) مدل گراف نگاشت شکل ۲.۱ (الف) را نشان می‌دهد. اکنون مسئله به مسئله گراف تبدیل شده است که می‌خواهد رأس‌های گراف را با استفاده از حداقل تعداد رنگ‌ها رنگ کند به طوری که دو رأس مجاور رنگ‌های

متفاوتی داشته باشند. رأس‌های گراف در شکل ۲.۱ (ب) با چهار رنگ رنگ شده‌اند و از این رو ناحیه‌های نگاشت شکل ۲.۱ (الف) می‌تواند با چهار رنگ رنگ شود. جالب است که، ناحیه‌های هر نگاشت می‌تواند با چهار رنگ رنگ شود [۴].

۲.۲.۱ تخصیص بسامد

یک مهندس مخابرات می‌خواهد بسامدهایی را به چند فرستنده اختصاص دهد. با توجه به موقعیت‌های فیزیکی فرستنده‌ها، برخی از جفت‌های فرستنده در دامنه تداخل قرار دارند. فرض کنید که n فرستنده وجود دارد که n بسامد $\{1, 2, \dots, n\}$ به فرستنده‌ها اختصاص داده خواهد شد به طوری که هیچ دو فرستنده وجود نداشته باشد که بسامد یکسانی به آنها اختصاص داده شده باشد و اگر دو فرستنده در دامنه تداخل باشند، آنگاه اختلاف بین بسامدهای اختصاص داده شده باید تا حد ممکن بزرگ باشد. به راحتی می‌توان مدل گراف این مسئله را به صورت زیر توسعه داد. گراف G را با نشان دادن هر فرستنده با یک رأس G و اگر فرستنده‌های متناظر با رأس‌های u و v در دامنه تداخل باشند با اضافه کردن یال بین دو رأس u و v از G می‌سازیم. اکنون مسئله تخصیص بسامد به مسئله نام‌گذاری رأس‌های G به وسیله ...

تمرین‌ها

۱. نقشه پردیس خود را مطالعه کنید و شبکه جاده‌ای محوطه دانشگاه خود را مدل‌سازی کنید.
۲. گرافی بسازید که رابطه مجاورت اتاق در یک طبقه از ساختمان دانشگاه شما را نشان دهد.
۳. مهمانی‌ای را در نظر بگیرید که دقیقاً دو گزینه متناوب غذا برای هر دسته غذایی به صورت زیر وجود دارد. برنج: ساده/ زرد، کاری: ماهی / مرغ، نان: ساده / کره‌ای، کباب: جوجه / گوشت گوسفند، میوه: موز / انبه، نوشیدنی: چای / قهوه. شرکت کنندگان ثبت‌نام شده گزینه‌های خود را بر اساس جدول ۱. ۱ ارائه دادند. در صورت انتخاب گزینه‌های مختلف در یک دسته یکسان، دو شرکت کننده در گزینه‌هایشان اختلاف نظر دارند. اختلاف نظرهای شرکت کنندگان با استفاده از یک گراف تعارض که در آن هر یک از شرکت کنندگان با یک رأس نشان داده شده‌اند، نشان داده می‌شود و یالی بین دو رأس وجود دارد هرگاه شرکت کنندگان متناظر تعارض داشته باشند. با مشاهده گراف تعارض، کمترین تعداد افرادی که عدم حضور آنها شرکت کنندگان را به دو گروه آزاد متعارض تقسیم می‌کند، را پیدا کنید.

جدول ۱.۱: منو غذا

شرکت کنندگان	برنج	کاری	نان	کباب	میوه	نوشیدنی
Abir	ساده	ماهی	ساده	جوجه	انبه	چای
Bony	ساده	جوجه	کره‌ای	گوشت گوسفند	موز	قهوه
Dristy	ساده	ماهی	ساده	جوجه	انبه	چای
Elis	ساده	جوجه	کره‌ای	گوشت گوسفند	موز	قهوه
Faria	ساده	ماهی	ساده	جوجه	گوشت گوسفند	چای
Snigdha	زرد	ماهی	کره‌ای	جوجه	گوشت گوسفند	قهوه
Subir	زرد	جوجه	کره‌ای	گوشت گوسفند	موز	چای
Jony	ساده	ماهی	ساده	جوجه	گوشت گوسفند	چای

۴. در شرکتی پنج شغل $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$ با پنج کارگر A, B, C, D و E برای انجام این کار وجود دارد. با این حال، هرکسی تخصص انجام هر کاری را ندارد. تخصص آنها به شرح زیر است: $E = \{J_1, J_5\}$, $D = \{J_3, J_5\}$, $C = \{J_1, J_3, J_5\}$, $B = \{J_2, J_4\}$, $A = \{J_1, J_2, J_3\}$. گراف مدلی برای نشان دادن تخصص شغلی افراد ایجاد کنید و شغلی برای کارگران به طوری پیدا کنید که هر کارگر بتواند کاری انجام دهد.

۵. سازه‌ای دارای ۶۰۰ متر مربع ناحیه مستطیل شکل روی طبقه‌ای از یک ساختمان می‌باشد که در آن نیاز به ایجاد چهار واحد پردازش A, B, C و D است. واحدهای پردازش A و D هر کدام نیاز به ۱۰۰ متر مربع در حالی که B و C هر یک نیاز به ۲۰۰ متر مربع دارند. علاوه بر این، الزامات مجاورتی زیر باید رعایت شود: B, C و D باید در مجاورت A باشند؛ A و D باید مجاور B باشند؛ A و D باید مجاور C باشند؛ و A, B و C باید در مجاورت D قرار بگیرند. آیا شما می‌توانید طبقه را طوری طرح بندی کنید که در آن فضا برای هر واحد پردازش یک مربع مستطیل خواهد بود؟ طرح مناسبی را در توجیه خود پیشنهاد دهید.

مراجع

- [١] Biggs, N. L. , Lloyd, E. K. , Wilson, R. J. : Graph Theory: .١٩٣٦-١٧٣٦ Oxford University Press, Oxford (١٩٧٦)
- [٢] Bondy, J. A. , Murty, U. S. R. : Graph Theory with Applications. Elsevier Science Ltd/North- Holland, New York (١٩٧٦)
- [٣] Gross, J. L. ,Yellen, J. : Graph Theory and Its Applications, ٢nd edn. Chapman and Hall, London (٢٠٠٥)
- [٤] Appel, K. , Haken, W. : Every map is four colourable. Bull. Am. Math. Soc. ,٨٢ ٧١٢-٧١١ (١٩٧٦)
- [٥] Calamoneri, T. , Massini, A. , Török, L. , Vrt'o, I. : Antibandwidth of complete k-ary trees. Discret. Math. ,(٢٢)٣٠٩ ٦٤١٤-٦٤٠٨ (٢٠٠٩)
- [٦] Patwary, M. M. A. , Rahman, M. S. : Minimum face-spanning subgraphs of plane graphs. AKCE J. Graphs. Combin. ,(٢)٧ ١٥٠-١٣٣ (٢٠١٠)
- [٧] Nishizeki, T. , Rahman, M. S. : Planar Graph Drawing. World Scientific, Singapore (٢٠٠٤)
- [٨] Porter, M. A. , Onnela, J. -P. , Mucha, P. J. : Communities in networks. Not. Amer. Math. Soc. ,٥٦ ,١٠٩٧-١٠٨٢ ١١٦٦-١١٦٤ (٢٠٠٩)
- [٩] Chen, J. , Saad, Y. : Dense subgraph extraction with application to community detection, in IEEE Trans. Knowl. Data Eng. ,(٧)٢٤ ١٢٣٠-١٢١٦.(٢٠١٢) doi:١٠. ١١٠٩/TKDE. .٢٠١٠ ٢٧١
- [١٠] Sung, W. : Algorithms in Bioinformatics. CRC Press, London (٢٠١٠)
- [١١] Mall, R. : Fundamentals of Software Engineering, ٤th edn. Prentice-Hall of India Pvt. Ltd. (٢٠١٤)

فصل ۲

اصطلاحات پایه‌ای گراف

در این فصل، برخی از تعاریف اصطلاحات نظری پایه‌ای گراف را می‌آموزیم و با برخی نتایج اولیه از نظریه گراف آشنا می‌شویم.

۱.۲ گراف‌ها و گراف‌های چندگانه

گراف G یک چند تایی شامل مجموعه‌ای متناهی V از رأس‌ها و مجموعه‌ای متناهی E از یال‌ها است که هر یال جفتی نامرتب از رأس‌ها است. دو رأس وابسته به یال e رأس‌های انتهایی e نامیده می‌شوند. اغلب یال بین دو رأس u و v را با (u, v) ، نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های G را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. راس گراف، گره گراف نیز نامیده می‌شود.

مراجع

- [١] Karim, M.R., Rahman, M.S.: On a class of planar graphs with straight-line grid drawings on linear area. J. Graph Algorithms Appl. , (٢) ١٣ ١٧٧-١٥٣ (٢٠٠٩)
- [٢] Koshy, T.: Discrete Mathematics with Applications. Elsevier, Amsterdam (٢٠٠٤)
- [٣] West, D.B.: Introduction to Graph Theory, ٢nd edn. Prentice Hall, New Jersey (٢٠٠١)
- [٤] Havel, V.: A remark on the existence of finite graphs [Czec] Casopis. Pest. Mat. , ٨٠ ٤٨٠-٤٧٧ (١٩٥٥)
- [٥] Hakimi, S.L.: On realizability of a set of integers as degrees of vertices of a linear graph. SIAM J. Appl. Math. , ١٠ ٥٠٦-٤٩٦ (١٩٦٢)
- [٦] Nishizeki, T., Rahman, M.S.: Planar graph drawing. World Scientific, Singapore (٢٠٠٤)
- [٧] Wilson, R.J.: Introduction to Graph Theory, ٤th edn. Longman, London (١٩٩٦)
- [٨] Clark, J., Holton, D.A.: A First Look at Graph Theory. World Scientific, Singapore (١٩٩١)
- [٩] Pirzada, S.: An Introduction to Graph Theory. University Press, India (٢٠٠٩)